

Θέμα 1. (1,5 μον.)

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Αν $A \subseteq X$ να ορίσετε την κλειστή θήκη $\bar{A}$ του A και να δείξετε ότι το $\bar{A}$ είναι κλειστό σύνολο.

Θέμα 2. (3 μον.)

(i) Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ και ρ_A η σχετική μετρική.

α) Αν $G \subseteq A$ να δείξετε ότι το G είναι ανοικτό σύνολο του μετρικού χώρου (A, ρ_A) αν και μόνο αν υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο V του X ώστε $G = A \cap V$.

β) Αν $F \subseteq A$ να δείξετε ότι το F είναι κλειστό υποσύνολο του μετρικού χώρου (A, ρ_A) αν και μόνο αν υπάρχει ένα κλειστό υποσύνολο K του X ώστε $F = A \cap K$.

(ii) Θεωρούμε τον $(\mathbb{R}, \rho)$ όπου ρ είναι η συνήθης μετρική και θεωρούμε το σύνολο $A = (-2, 3] \cup \{5\} \cup [6, 9)$. Για καθένα από τα σύνολα $\Gamma = (1, 3]$ και $\Delta = \{5\} \cup [6, 8)$ να εξετάσετε αν είναι ανοικτό και αν είναι κλειστό στο μετρικό χώρο (A, ρ_A) .

Θέμα 3. (3 μον.)

Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως ΣΩΣΤΗ (παρουσιάζοντας την απόδειξή της) ή ως ΛΑΘΟΣ (βρίσκοντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα).

(Α) Αν (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και K, L είναι δυο ανοικτά υποσύνολα του X τότε το σύνολο $K \cap L$ είναι ανοικτό.

(Β) Αν (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και K, L είναι δυο πλήρη υποσύνολα του X τότε το σύνολο $K \cap L$ είναι πλήρες.

(Γ) Αν (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και K, L είναι δυο συμπαγή υποσύνολα του X τότε το σύνολο $K \cap L$ είναι συμπαγές.

(Δ) Αν (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και K, L είναι δυο συνεκτικά υποσύνολα του X τότε το σύνολο $K \cap L$ είναι συνεκτικό.

Θέμα 4. (2 μον.)

α) Αν (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο X και $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$, να δείξετε ότι το σύνολο

$$L = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

είναι συμπαγές.

β) Αν (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι δυο βασικές ακολουθίες του X , να δείξετε ότι η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\rho(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

Θέμα 5. (1 μον.)

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$ ώστε $\emptyset \neq A \neq X$. Αν ισχύει ότι $\rho(A, X \setminus A) > 0$ να δείξετε ότι το A είναι ανοικτό και ταυτόχρονα κλειστό υποσύνολο του X .

Καλή Επιτυχία!